513. 函數展開ノ一形式ト其收斂問題(II)

北川　敏男（阪大）

5. 茲デハ，最初ノ手掛リトシテ、問題ノ特殊ノ場合デアルトコロノ Bessel 函數ニヨル展開ヲ考ヘル。吾々ノ展開形式ヘ容レルヤウ，問題ヲ formulate スルタメ，(I) §4 例2ニ於ケルガ如ク $\mathfrak{G}[f]$，$j_\lambda(x)$ ヲ定義シ、コレニ應ジテ、§2〔I〕—〔IX〕ノ規約中，〔II〕,〔III〕ヲ次ノ如ク定メル：

〔II〕 Classe (A) ハ次ノ三條件ヲ充ス函數ノ全体

1°. $x \geqq 0$ ニテ定義サレテ可測。

2°. $\lim\limits_{x=0} xf(x)=0$

3°. $x^{p+1}f(x)$ が $[0, 1]$ デ Lebesgue 積分可能。

classe (B) ハ，(A) ニ屬シ $f(0)=0$ ナル如キ $f(x)$ ノ全体。

classe (C) ハ (B) ニ屬シ且ツ二回微分可能ニシテ $f'(0)=0$ ナル如キ $f(x)$ ノ全体。

〔III〕 $\mathfrak{M}$ ハ $R(\lambda)>0$ ナルカ或ハ $R(\lambda)=0$ ニシテ且ツ $I(\lambda)>0$ ナル如キ λ ノ全体。

然ルトキ、他ノ假定及ビ規約ハ（コノ際）自ラ定マル。依ッテ吾々ハ適當ニトッタ sequence of contours $\{\mathfrak{C}_r\}$ ニ對シテ

$$(5.1)\ S_1 \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r} \frac{j_p(-i\lambda^{\frac{1}{2}}, x)}{\delta[j_p(-i\lambda^{\frac{1}{2}}, x)]}\,\delta[\mathfrak{L}_{i\lambda^{\frac{1}{2}}}, (f(x))]\,d\lambda,$$

ナル Contour-integrals ノ sequence ヲ考ヘル。既ニ述ベタ如ク、Bessel-Fourier, Bessel-Dini, Schlömilch 等ノ展開ハ，コノ Contour-integrals ニ於イテ、lineare fonctionnelle δ ヲ特殊ニトルコトニヨリ、馴致セラレル。

尚、茲ニ Delsarte〔3〕ニ從ヒ

$$\mathfrak{L}_\lambda(f(x)) = \frac{\pi}{2x^p}\int_0^x \xi^{p+1}\left[Y_p(\lambda x)J_p(\lambda\xi)\right.$$

$$\left. - J_p(\lambda x)Y_p(\lambda\xi)\right] f(\xi)\,d\xi$$

ト置ク。実際§2 條件〔VIII〕ヲ充シテヰルコトハ Lommel ノ公式ヲ使ツテ示シウル。

6. 計算ノ進路ヲ見透シ良クスルタメ、茲ニ方針ヲ述ベテ置イタ方ガヨカロウト思フ。

以下ノ取扱ヒハ，線狀可遷作用子ノ展開問題（§4 例1參照）ヲ論ジタ方法ト思想ニ於イテハ同一デアル．即チ

1°. 線狀可遷作用子ノ場合 Contour-integral ヲバ

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b f(\xi)\,\frac{\sin\rho_r(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi + W_r$$

デ表ハシ，W_r ハ適當ナ條件ヲ $A(\lambda)$ ニ對シテ與ヘルトキ，$a+\delta \le x \le b-\delta'$ デ一様ニ零ニ tend スルヤウニスレバ，問題ハ第一項 $r\to\infty$ ト共ニ即チ Dini ノ積分ノ處理

ニ移ッテクルトイフ方法デアツタが、コノ場合 Dini ノ積分ノトコロヲ Bessel 函数 $J_p(\lambda x)$ ニヨツテ表ハサレタ特異積分即チ Hankel ノ積分ヲ以テスルヤウニ変形スル。

2°. 收斂問題ヲ次ノ二ツノコトニ関係セシメル：

(i) $f(x)$ が何回微分出来ルカ？

(ii) $A(\lambda)$ ノ asymptotic behaviour 如何？

極ク粗雑ナ言ヒ方ヲスレバ，$f(x)$ が微分出来ル回数が高ケレバ高イホド、$A(\lambda)$ ノ asymptotic behaviour ニ對スル要求ハ緩メラレル。收斂定理ヲソノヤウニ整理シテオクコトが後ニ函数方程式ヲ論ズル際ニ於イテ有效デアルカラ、(i), (ii) ヲ相互ニ反映シ合フヤウニ問題ヲ取扱フ。以下、方針ノ荒筋ヲ述ベヨウ。

イ. $\delta[\mathcal{L}_\lambda(f(x))]$ ノ分解。λ_1 が $0<\operatorname{Arg}\lambda_1\leq 2\pi$ ノ範囲ヲ正ノ方向ニ一廻リスルトキ，$\lambda=-i\lambda_1^{\frac{1}{2}}$ ハ $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg}\lambda_1\leq\frac{\pi}{2}$ ノ範囲ヲ正ノ方向ニ廻ルモノトスル。今 $\mathcal{L}_\lambda(f(\omega))$ ヲ分解シテ —— $0<\omega<1$ ニトツテ ——

$$\mathcal{L}_\lambda(f(x))=\frac{\pi}{2x^p}\int_0^\omega-\frac{\pi}{2x^p}\int_x^\omega=\mathcal{L}_\lambda^*(f(x))-\mathcal{L}_\lambda^{**}(f(x))$$

ト置ケバ，fonctionnelle δ ハ linear ダカラ、

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{L}_\lambda(f(x))&=\delta(\mathcal{L}_\lambda^*(f(x))-\delta(\mathcal{L}_\lambda^{**}(f(x))\\&=\delta\left(\frac{\pi}{2x^p}Y_p(\lambda x)\right)\int_0^\omega\xi^{p+1}J_p(\lambda\xi)f(\xi)\,d\xi\\&\quad-\delta\left(\frac{\pi}{2x^p}J_p(\lambda x)\right)\int_0^\omega\xi^{p+1}Y_p(\lambda\xi)f(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

$$-\delta\left(\frac{\pi}{2x^p}\int_x^{\omega}\xi^{p+1}\left\{Y_p(\lambda x)J_p(\lambda\xi)-J_p(\lambda x)Y_p(\lambda\xi)\right\}d\xi\right)$$

$$=K_1(\lambda,f)-K_2(\lambda,f)-K_3(\lambda,f)$$

ト置イテ

$$S_r=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j_p(i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x)}{\delta(j_p(i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x))}K_1(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}},f)\,d\lambda_1$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j_p(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x)}{\delta(j_p(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x))}K_2(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}},f)\,d\lambda_1$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j_p(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x)}{\delta(j_p(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}}x))}K_3(-i\lambda_1^{\frac{1}{2}},f)\,d\lambda_1$$

コヽデ、右辺第二項ハ *vanish* スル。第一項，第三項ヲ評価スルタメ、—— コレラヲ夫々 T_r, U_r トオク ——，λ ヲ用キテ、次ノ如ク表ハス：

$$T_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\mathfrak{C}_r}}\frac{-2\lambda j_p(\lambda x)}{\delta(j_p(\lambda x))}\delta\left(\frac{\pi}{2x^p}Y_p(\lambda x)\right)\int_0^1\xi^{p+1}J_p(\lambda\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\lambda$$

$$U_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\mathfrak{C}_r}}\frac{-2\lambda j_p(\lambda x)}{\delta(j_p(\lambda x))}K_3(\lambda,f)\,d\lambda.$$

但シ，$\widetilde{\mathfrak{C}_r}$ ハ負ノ虚軸ニ発シテ、第四象限ヨリ第一象限ニ入リ、正ノ虚軸ニ終ル。

8. 諸函数ノ近似展開。 *Bessel* 函数 $J_p(\lambda x)$, $Y_p(\lambda x)$ ノ近似展開ニ依ツテ

$$(8.1)\quad \delta[j_p(\lambda x)]=\frac{2^p p!}{2\lambda^{\frac{1}{2}+p}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[e^{-i\theta}\delta\left\{\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)+iB_p(\lambda x)\right)\right\}\right.$$

$$+e^{ig}\delta\left\{\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)-iB_p(\lambda x)\right)\right\}$$

$$(8.2)\quad \delta\left[\frac{\pi}{2x^p}Y_p(\lambda x)\right]=\frac{1}{2i\lambda^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[e^{-ig}\delta\left\{\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)\,iB_p(\lambda x)\right)\right\}\right.$$

$$\left.-e^{ig}\delta\left\{\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)+iB_p(\lambda x)\right)\right\}\right]$$

$$(8.3)\quad J_p(\lambda x)Y_p(\lambda\xi)-J_p(\lambda\xi)Y_p(\lambda x)$$

$$=\frac{-2}{\pi\lambda x^{\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)-iB_p(\lambda x)\right)\frac{e^{i\lambda(\xi-x)}}{2i\,\xi^{\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda\xi)+iB_p(\lambda\xi)\right)$$

$$+\frac{2}{\pi\lambda x^{\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x)+iB_p(\lambda x)\right)\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{2i\,\xi^{\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda\xi)-iB_p(\lambda\xi)\right)$$

但シ，コヽニ $g=\frac{p}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ デアリ、$A_p(x)$, $B_p(x)$ ハ，良ク知ラレタ *Bessel* 函数ノ近似展開

$$J_p(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos(z-g)A_p(z)\right.$$

$$\left.-\sin(z-g)B_p(z)\right]$$

ニ於イテ現ハレルモノ。以上ノ近似展開ハ $|\mathrm{Arg}\,\lambda x|<\pi$ デ成立スル。

9．積分 T_r, U_r ノ処理。 係数ヲ整理スルトキ

$$T_r=\frac{1}{2x^p}\int_{\widehat{C_r}}\lambda J_p(\lambda x)\frac{e^{-ig}G_-^+-e^{ig}G_+^-}{e^{-ig}G_+^++e^{ig}G_-^-}\left(\int_0^{\omega}\xi^{p+1}J_p(\lambda\xi)f(\xi)d\xi\right)d\lambda$$

$$U_r=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^p}\int_{\widehat{C_r}}\lambda^{\frac{1}{2}}J_p(\lambda x)\frac{H(\lambda,f)}{e^{-ig}G_+^++e^{ig}G_-^-}d\lambda$$

但シ

$$G_{\pm}^{\pm} \equiv G_{\pm}^{\pm}(\lambda) \equiv \delta\left\{ \frac{e^{\pm i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x) \pm i B_p(\lambda x)\right)\right\}$$

茲ニ $G_{\pm}^{\pm}$ ノ肩ノ ± ハ $e^{\pm i\lambda x}$ ノ符号±ト，肢ノ ± ハ $A_p(\lambda x) \pm B_p(\lambda x)$ ノ ± ト一致スルモノトスル。又

$$H(\lambda, f) = H_+(\lambda, f) + H_-(\lambda, f)$$

但シ

$$H_{\pm}(\lambda, f) = \delta\left(\frac{\pm 1}{x^{\frac{1}{2}}}\left(A_p(\lambda x) \mp i B_p(\lambda x)\right)\int_x^{\omega} \xi^{p+\frac{1}{2}} e^{\pm i\lambda(\xi - x)}\left(A_p(\lambda\xi) \pm i B_p(\lambda\xi)\right) f(\xi)\, d\xi \right)$$

Birkhoff, *Stone* 等ガ常微分方程式ノ境界値問題デ用キタ *asymptotic expansion* ヲ利用シタ方法ニ倣ヒ，次ノ如ク處理スル。今、$\widetilde{\mathfrak{C}}_r = \widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)} + \widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}$ ト分ケル。茲ニ、$\mathfrak{C}_r^{(i)}$ ハ第 i 象限ニアル $\widetilde{\mathfrak{C}}_r$ ノ部分デアル。

$(i = 1, 4)$

$\boxed{1°.\ \mathrm{T}_r\ ノ計算}$ 第一並ニ第四象限ニ於テ、夫々

條件(I) $$\frac{e^{-i\delta}G_-^+ - e^{i\delta}G_+^-}{e^{-i\delta}G_+^+ + e^{i\delta}G_-^-} = 1 + o\left(e^{\pm 2i\lambda}\right)$$

ニナルヤウナ $\{\mathfrak{C}_r\}$ ガ得ラレテキルト假定スル。

然ルトキニハ，第四象限ニ於テ

$$\mathrm{T}_r^{(4)} = \frac{1}{2x^p}\int_{\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)}} \lambda J_p(\lambda x)\left(\int_0^{\omega} \xi^{p+1} H_p^{(1)}(\lambda\xi) f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda$$

第一象限ニ於イテ

$$\mathrm{I}_r^{(1)}=\frac{1}{2x^p}\int_{\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}}\lambda J_p(\lambda x)\left(\int_0^\omega \xi^{p+1}H_p^{(2)}(\lambda\xi)f(\xi)\,d\xi\right)d\lambda$$

ヲ考ヘレバ，コレト I_r トノ差ハ夫々ノ象限デ考ヘルトキ，任意ノ正数 η ニ對シテ $\eta\leqq x\leqq 1-\eta$ ニテ一様ニ零ニ tend スル。

曲線 $\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)}$，$\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}$ ノ積分ヲ、実軸，虚軸上ノ積分ニ直シ，茲ニ

$$H_p^{(1)}(e^{\pi i}z)=-e^{-p\pi i}H_p^{(2)}(z)$$

$$J_p(\lambda\xi)=\frac{H_p^{(1)}(\lambda\xi)+H_p^{(2)}(\lambda\xi)}{2}$$

$$J_p(e^{\pi i}z)=e^{ip\pi i}J_p(z)$$

ナル関係ヲ利用スレバ

$$\mathrm{I}_r^{(4)}+\mathrm{I}_r^{(1)}=\frac{1}{x^p}\int_0^{\rho_r}\lambda J_p(\lambda x)\left(\int_0^\omega \xi^{p+1}J_p(\lambda\xi)f(\xi)\,d\xi\right)d\lambda$$

ナル實軸上ノ積分ニ直ル。（但シ，コヽニ ρ_r ハ $\widetilde{\mathfrak{C}}_r$ ト實軸トノ交ハリノ点ノ座標）

$\boxed{2^\circ.\ \mathrm{U}_r\text{ ノ処理}}$ $\xi^p f(\xi)$ が $(0,\omega)$ デ Lebesgue 積分可能デアルコトカラ

$$\int_x^\omega \xi^{p+\frac{1}{2}}e^{\pm i\lambda(\xi-x)}\left(A_p(\lambda\xi)\pm iB_p(\lambda\xi)\right)f(\xi)\,d\xi$$

$$=E_\pm e^{\pm i\lambda(\omega-x)}+F_\pm$$

ト書カレ，茲ニ、$|\lambda|\longrightarrow\infty$ ノトキ、$E_\pm$，$F_\pm\longrightarrow 0$ デアル。

従ッテ、$\widetilde{\mathfrak{C}}_4$ 上デハ，$H_+(\lambda,f)$ が，$\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ 上デハ，$H_-(\lambda,f)$

ガ dominent デアル。

$$U_r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p} \int_{\widehat{\mathfrak{C}}_r^{(4)}} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p} \int_{\widehat{\mathfrak{C}}_r^{(1)}}$$
$$= U_r^{(4)} + U_r^{(1)}$$

トオクトキ，$U_r^{(4)}$ ニ於テ dominent ナモノハ

$$\int_{\widehat{\mathfrak{C}}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda x} \delta\left(e^{i\lambda(\omega-x)} \cdot \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)}{\delta\left(e^{i\lambda x} \cdot \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda|$$

ノ常数倍デアル。コレガ $r \to \infty$ ニ對シテ有界ニナレバ，シカモ、或ル範囲ヲ x ニ関シテ一様ニ有界ニナルコトガ云ヘレバ，$U_r^{(4)}$ ハ $r \to \infty$ ニ對シテソノ範囲ノ x ニ関シテ一様ニ零ニナル。

サテ、コノコトヲ云フニハ

条件(II)
(1) $\delta\left(e^{-i\lambda x} \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)$ ガ第一象限ノ λ ニ関シテ bounded デアル。

(2) $\displaystyle\int_{\widehat{\mathfrak{C}}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda g}}{\delta\left(e^{i\lambda x} \cdot \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1)$

(as $r \to \infty$)

ガ $0 \leqq g \leqq s$ ニテ成立スルヤウナ正数 s 並ビニ $\{\mathfrak{C}_r\}$ ガ存在スル。

コノ二条件ガ満足サレテヰルナラバ，$0 \leqq \omega + x \leqq s$，$\delta \leqq x \leqq \omega - \delta$ ヲ同時ニ満足スル x ノ閉区間ニ於イテ $U_r^{(4)}$ ハ $r \to \infty$ ト共ニ一様ニ零ニ tend スル。

全ク同様ニシテ $\mathfrak{U}_r^{(1)}$ モ處理シウル。

10. 以上ノ結果ヲ多少整頓シテ述ベルト次ノ如クナル。

定理1. §5ノ假定並ビニ規約ノモトニ於イテ、適當ニ選ンダ $\{\widetilde{\mathfrak{C}}_r\}$ ニ關シテ、次ノ條件ガ滿足サレテヰルトスル。

(I) $0 \leqq q \leqq \delta$ ナル如キ q ニ關シテ $r \to \infty$ ノトキ

$$\int_{\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda q}}{\delta\left(\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1)$$

$$\int_{\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}} \left| \frac{e^{-i\lambda q}}{\delta\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1)$$

ナル如キ正數 δ ガ存在スル。

(II) $$\frac{\delta(Y_p(\lambda x))}{\delta(J_p(\lambda x))} = 1 + O\left(e^{\mp i(1+\omega)\lambda x}\right)$$

但シ、$\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)}$ ニ對シテハ負號，$\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}$ ニ對シテハ正號ヲ採用。

(III) $$\delta\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right) = O(1)$$

$$\delta\left(\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right) = O(1)$$

ガ夫々 $\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(4)}$，$\widetilde{\mathfrak{C}}_r^{(1)}$ 上デ $r \to \infty$ ニ對シテ成リ立ツ。

然ルトキニハ，任意ノ正數 η ニ對シテ $\eta \leqq x \leqq \omega - \eta$ ニシテ且ツ $0 < x + \omega \leqq \delta$ ナル如キ x ノ閉區間ニテ、x ニ關シテ一様ニ

$$S_p - \frac{1}{x^p}\int_0^{\rho_r} \lambda J_p(\lambda x)\left(\int_0^{\omega} \xi^{p+1} J_p(\lambda\xi) f(\xi) d\xi\right) d\lambda$$

ハ $r \to \infty$ ト共ニ零ニ近ヅク。

コレニ依ツテ問題ハ Hankel 積分ノ取扱ヒニ帰着シタ。然ルニ Hankel 積分ニ関シテハ既ニ精細ナ收斂定理ガ知ラレテヰルカラ、イロイロナ形ノ收斂定理ヲ定理 I カラ得ラレルコトニナル。

11. 以上、成ルベク一般ナ lineare fonctionnelle δ ニツイテノ論ジヤウトシタノデ、定理ノ形ハ相当煩雑トナツタ、收斂ヲ主張シウル x ノ区間モ亦狭メラレテヰル。コウシタ道行キヲトツタノモスベテ、アトデ函数方程式ヲ論ズルトイフ目標ヲ第一ニシタタメデアル。ソレデ，今、特ニ Fourier-Bessel 級数ニ對應スルモノトシテ

(11.1) $\quad \delta[f(x)] = f(b) \qquad$ (b ハ或常数)

ナル linear fonctionnelle ヲトルト，定理 I カラ得ラレルコトガ、従來知ラレテヰル結果ヨリ狭イ。即チ高々、$\eta \leqq x \leqq \frac{b}{2} - \eta$ デシカ收斂ガ主張サレナイ。(η ハ任意ノ正数)

シカシナガラ、(11.1) トシテ fonctionnelle δ ガ與ヘラレルトキニハ、U_r ノ処理ノ項ヲ読ムト直チニ分ルヤウニ，定理 I ノ $0 < x + \omega \leqq \delta$ トイフ條件ハ $0 < x \leqq \delta$ デオキカヘウルシ、又條件 (I) ノ δ トシテハ b ヨリ小ナル任意ノ正数デヨイコトガワカル。ソレ故ニ、通常ノ定理ヲ導クノニ大シテ骨ヲ折ラナクテ済ム。同様ナコトガ Fourier-Dini

ノ級數

(11.2) $\quad S[f(x)] = (H+p)f(b) + bf'(b)$ (b ハ或ル常數)

ニツイテ云ハレル。Schlömilch ノ級數ニ關シテハ，定理17（同一ノ思想ノモトニ）更ニ他種類ノ條件ノ加ヘテ精細ニシテカラ論ジタイ。